Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo III–Curso 2019

Segundo parcial

Lunes 1º de julio de 2019

Comienzo: 8:30

Finalización: 11:30

§A. 1) Mostrar que el cono $\mathscr{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0\}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2) Averiguar si el campo $X(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ es un campo gradiente, y en caso afirmativo hallar un potencial escalar de X.

3) Calcular $\int_{\mathbb{S}^2} F \cdot dA$, donde $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, y en $\mathbb{S}^2$ se considera el vector normal saliente.

4) Calcular la derivada exterior de $\eta := z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y) dx \wedge dz$.

30 puntos

§B. 1) Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una variedad con borde compacta de dimensión 2, y supongamos que $F = (f, g) : D \to \mathbb{R}^2$ es un campo C^∞. Probar que $\int_{\partial D} f dg = \int_D \det F'(x, y) dx dy$.

2) Se consideran $\omega, \eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ tales que

$$\omega(x, y) = x dy - y dx, \qquad \eta(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \omega(x, y).$$

Considérese $\mathbb{S}^1$ orientada positivamente, y sea Ω la forma de volumen en $\mathbb{S}^1$.

a) Mostrar que para todo $p = (a, b) \in \mathbb{S}^1$ el conjunto $\{(-b, a)\}$ es base ortonormal de $T_p\mathbb{S}^1$, y que $\Omega(p)(v) = v \cdot (-b, a) = av_2 - bv_1, \forall v = (v_1, v_2) \in T_p\mathbb{S}^1$.

b) Probar que $\Omega(p)(v) = \omega(p)(v) = \eta(p)(v), \quad \forall p \in \mathbb{S}^1, v = (v_1, v_2) \in T_p\mathbb{S}^1$.

c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) := \frac{x}{\|x\|}$. Probar que $\eta = f^*(\Omega)$.

30 puntos

Soluciones

§A. 1) Los mapas $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathscr{C}$ y $\psi : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dadas por $\varphi(x,y) := (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ y $\psi(x,y,z) := (x,y)$ son de clase C^∞ y mutuamente inversos.

2) Un potencial escalar es $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $f(x,y) = xy^2 + \frac{1}{3}x^3$.

3) Por el teorema de Gauss es

$$\int_{\mathbb{S}^2} F \cdot dA = \int_{B(0,1)} \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz = 3\int_{B(0,1)} x^2+y^2+z^2 \, dx\, dy\, dz.$$

Para calcular esta integral pasamos a coordenadas esféricas: $x = \rho\cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, $z = \rho\cos\phi$. El determinante jacobiano es $J(\rho,\theta,\phi) = -\rho^2 \operatorname{sen}\phi$. Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{S}^2} F \cdot dA = 3\int_{B(0,1)} x^2+y^2+z^2 \, dx\, dy\, dz = 3\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^4 \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta, d\rho = \frac{12\pi}{5}.$$

4) $d\eta = d(z^2)dx\wedge dy + d(z^2+2y)dx\wedge dz = 2zdz\wedge dx\wedge dy + (2zdz+2dy)\wedge dx\wedge dz = 2zdx\wedge dy\wedge dz + 2dy\wedge dx\wedge dz = 2(z-1)dx\wedge dy\wedge dz$.

§B. 1) Por el teorema de Stokes se tiene $\int_{\partial D} f\, dg = \int_D d(f\, dg)$. Ahora,

$$\begin{aligned} d(f\, dg) &= df\wedge dg = (f_x dx + f_y dy)\wedge(g_x dx + g_y dy) \\ &= f_x g_x dx\wedge dx + f_x g_y dx\wedge dy + f_y g_x dy\wedge dx + f_y g_y dy\wedge dy \\ &= 0 + f_x g_y dx\wedge dy - g_x f_y dx\wedge dy + 0 = (f_x g_y - g_x f_y)dx\wedge dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{\partial D} f\, dg = \int_D (f_x g_y - g_x f_y)dx\wedge dy = \int_D (f_x g_y - g_x f_y)dx\, dy \int_D \det F'(x,y)dx\, dy.$$

2) a) Si $(a,b) = (\cos t_0, \operatorname{sen} t_0)$, sea $\alpha : (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \to \mathbb{S}^1$ tal que $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Entonces α es una parametrización positiva de $\mathbb{S}^1$ alrededor de p, y $\alpha'(t_0) = (-b, a)$, de modo que $(-b,a) \in T_p\mathbb{S}^1$. Como $\|(-b,a)\| = 1$ y $T_p\mathbb{S}^1$ tiene dimensión 1, se concluye que $\{(-b,a)\}$ es una base ortonormal positiva de $T_p\mathbb{S}^1$. Por otro lado, es claro que el mapa $\Omega'(p) : T_p\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}$ tal que $\Omega'(p)(v) = v\cdot(-b,a)\big)$ pertenece a $\Lambda^1\big((T_p\mathbb{S}^1)^*\big)$, y además $\Omega'(p)(-b,a) = a^2+b^2 = 1$, así que $\Omega'(p)$ es el elemento de volumen de $T_p\mathbb{S}^1$, y por lo tanto $\Omega(p) = \Omega'(p)$, $\forall p \in \mathbb{S}^1$.

b) Si $(x,y) \in \mathbb{S}^1$, entonces $\omega(x,y) = \eta(x,y)$ porque $x^2+y^2 = 1$. Por otro lado, si $v = (v_1, v_2) \in T_{(x,y)}\mathbb{S}^1$, entonces

$$\begin{aligned} \omega(x,y)(v) = (xdy - ydx)(v) = xdy(v) - ydx(v) = xv_2 - yv_1 = (v_1,v_2)\cdot(-y,x) \\ = \Omega(x,y)(v). \end{aligned}$$

c) $f^*(\Omega)(x,y)(v) = \Omega\big(f(x,y)\big)\big(Df_{(x,y)}(v)\big)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0)\}$, $v = (v_1, v_2) \in T_x\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0)\} = \mathbb{R}^3$. Un cálculo simple muestra que $f'(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$.
Por otro lado existen únicas $g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\})$ tales que

$$f^*(\Omega)(x,y) = g(x,y)dx + h(x,y)dy.$$

De hecho debe ser:

$$g(x,y) = f^*(\Omega)(x,y)(e_1) \qquad\qquad h(x,y) = f^*(\Omega)(x,y)(e_2).$$

Ahora:

$$f^*(\Omega)(x,y)(e_1) = \Omega\big(f(x,y)\big)\big(Df_{(x,y)}(e_1)\big) = \frac{(y^2, -xy)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \cdot \frac{(-y, x)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

$$f^*(\Omega)(x,y)(e_2) = \Omega\big(f(x,y)\big)\big(Df_{(x,y)}(e_2)\big) = \frac{(-xy, x^2)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \cdot \frac{(-y, x)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Por lo tanto

$$f^*(\Omega)(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \eta(x,y).$$